Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Zahnpasta*

Aufgabennummer: B_307		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

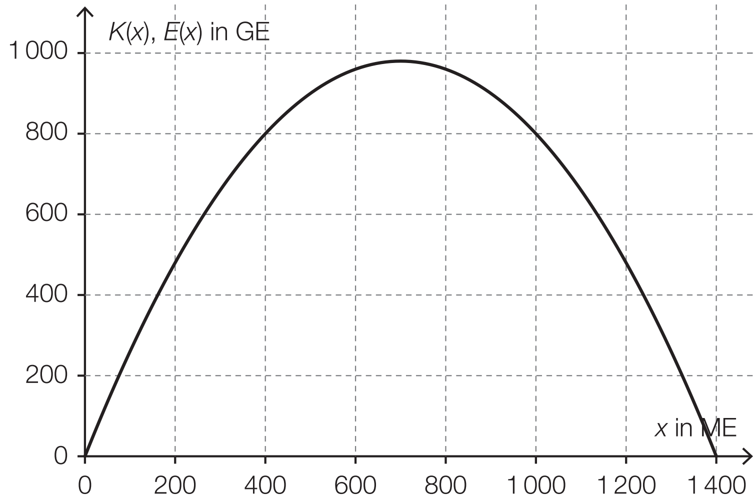
b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Kosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



– Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

– Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1\,000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1{,}8 \cdot 600 = 1080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

b) $p(0) = 3{,}15$: $3{,}15 = c$
$p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3{,}15$
$p(600) = 1{,}8$: $1{,}8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3{,}15$

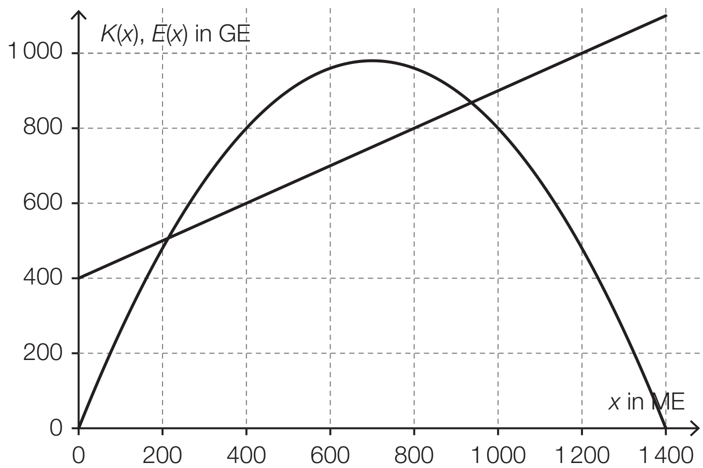
$a = 0{,}0000005$; $b = -0{,}00255$

$p(x) = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
$0 = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$
$x_1 = 2\,100$; ($x_2 = 3\,000$)

Die Sättigungsmenge liegt bei 2 100 Tuben täglich.
Ein sinnvolles Intervall ist [0; 2 100], da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)
Toleranzbereich: [450; 650]
Achtung: $x = 700$ ist falsch!

d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$
$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K_v(x)$ ... variable Kosten in GE
F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge

d) 1 × D: für die richtige Begründung