Wirkstoffkonzentration

Aufgabennummer: B_369

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Konzentration von verabreichten Wirkstoffen im Blut nimmt mit der Zeit ab.

a) In gewissen Zeitabständen wurde die Konzentration des Wirkstoffs im Blut einer Patientin gemessen. Die gemessenen Werte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit nach Beginn der Verabreichung in h	Wirkstoffkonzentration in mg/L
0	1
4	0,65
5	0,5
8	0,25
12	0,15
16	0,1

– Ermitteln Sie mithilfe von exponentieller Regression eine Funktionsgleichung, mit der die Abnahme der Konzentration näherungsweise beschrieben werden kann.
– Stellen Sie die gemessenen Werte und die ermittelte Funktionsgleichung grafisch dar.

b) Die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit ist proportional zur jeweils im Organismus vorhandenen Wirkstoffmenge.

– Stellen Sie eine zu diesem Sachverhalt passende Differenzialgleichung auf. $W(t)$ ist dabei die Wirkstoffmenge zur Zeit t.

c) Über eine Infusion werden einem Patienten pro Minute 2,3 mg eines Wirkstoffs verabreicht. Gleichzeitig wird ein Teil des Wirkstoffs wieder ausgeschieden.
Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$$

t … Zeit in min
$y(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs in mg/L

– Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* unter der Voraussetzung, dass sich zu Beginn der Infusion 0 mg des Wirkstoffs im Blut befinden.
– Erklären Sie, warum eine Funktion der Form $y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ für $a, k > 0$ ein beschränktes Wachstum beschreibt.

d) Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist eine bestimmte Konzentration eines Wirkstoffs im Blut notwendig. Im Rahmen einer Versuchsreihe wurden folgende Zeiten von der Verabreichung bis zum Erreichen dieser Konzentration bei einer Stichprobe von 10 Personen gemessen (Zeit in Minuten):

60	48	50	65	69	53	64	57	67	56

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} für die vorliegenden Daten.

Die Zeit bis zum Erreichen dieser Konzentration wird als normalverteilt angenommen.

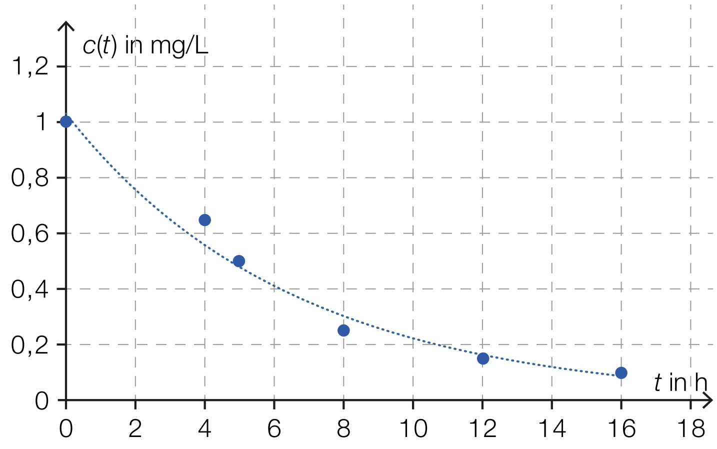
– Ermitteln Sie den zweiseitigen Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1$ %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) t ... Zeit nach Beginn der Verabreichung in h
$c(t)$ ... Wirkstoffkonzentration zur Zeit t in mg/L

Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:
$c(t) = 1{,}0266 \cdot e^{-0{,}1526 \cdot t}$ oder $c(t) = 1{,}0266 \cdot 0{,}8585^t$ (Koeffizienten gerundet)



b) $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -k \cdot W$

$-k$ ... Proportionalitätsfaktor ($k > 0$)

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$

$\frac{\mathrm{d}y}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \mathrm{d}t \quad \left(\text{oder: } \frac{y'}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50}\right)$

$\int \frac{\mathrm{d}y}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \int \mathrm{d}t \quad \left(\text{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{115}{3}} \cdot \mathrm{d}t = -\frac{3}{50} \cdot \int \mathrm{d}t\right)$

$\ln\left|y(t) - \frac{115}{3}\right| = -\frac{3}{50} \cdot t + C_1$

allgemeine Lösung:
$y(t) = C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

Ermitteln der speziellen Lösung:
$y(0) = 0$
$C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot 0} + \frac{115}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{115}{3}$

$y(t) = -\frac{115}{3} \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

$y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$
Die Funktion wächst, weil mit steigendem t der Term $e^{-k \cdot t}$ kleiner wird und somit der Funktionswert $y(t)$ größer. Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert a, weil für wachsendes t der Term $(1 - e^{-k \cdot t})$ gegen 1 strebt. Sie kann nicht über diesen Wert hinausgehen.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 58{,}9$ min
$s_{n-1} = 7{,}279...$ min

Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:
$58{,}9 \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{7{,}279...}{\sqrt{10}}$

$n = 10 \quad \Rightarrow \quad f = 9$
$t_{9;\,0{,}995} = 3{,}249...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in min:
[51,42; 66,38] (Intervallgrenzen gerundet)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3
d) 2

Thema: Medizin

Quellen: –