

Wein*

Aufgabennummer: B_447

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Durch die alkoholische Gärung von Traubensaft entsteht Wein. Dabei wird mithilfe von Hefepilzen der Zucker, der sich im Traubensaft befindet, in Alkohol umgewandelt.

Ein Winzer misst während eines Gärungsprozesses täglich den Alkoholgehalt und erhält folgende Tabelle:

Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen	Alkoholgehalt in %
1	0,7
2	1,4
3	2,3
4	3,6
5	5,2
6	7,3
7	9,7

- 1) Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{3,6 - 1,4}{4 - 2}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Der Alkoholgehalt soll in Abhängigkeit von der Zeit t seit Beginn des Gärungsprozesses durch eine quadratische Ausgleichsfunktion angenähert werden.

- 2) Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Ausgleichsfunktion.

Der Zuckergehalt während des Gärungsprozesses kann für die ersten 8 Tage näherungsweise mithilfe der Funktion z beschrieben werden:

$$z(t) = 0,25 \cdot t^2 - 4,1 \cdot t + 17 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 8$$

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen

$z(t)$... Zuckergehalt zur Zeit t in %

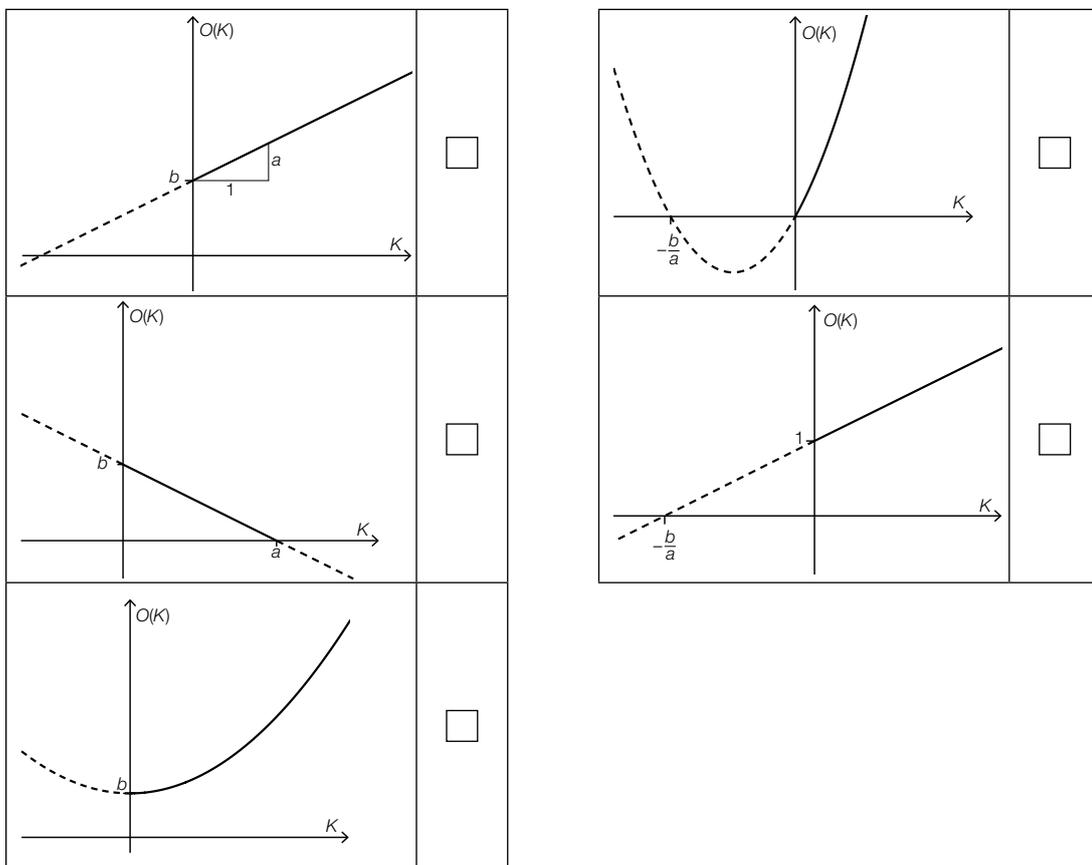
- 3) Berechnen Sie den Zuckergehalt bei einem Alkoholgehalt von 11 %.

- b) Es gibt mehrere Messskalen für den Zuckergehalt von Wein. Die Skala der Klosterneuburger Mostwaage ist die in Österreich gebräuchlichste Skala. In Deutschland wird häufig die Oechsle-Skala verwendet.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Skalen wird mit der folgenden Funktion O beschrieben:

$$O(K) = K \cdot (a \cdot K + b) \text{ mit } a, b > 0$$

- 1) Kreuzen Sie den Graphen der Funktion O an. [1 aus 5]



- c) Bei der Lagerung in einem Keller hat ein bestimmter Wein eine Temperatur von $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Der Wein wird in einen Raum mit der Umgebungstemperatur $T_U = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ gebracht. Nach 20 min hat der Wein eine Temperatur von $12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Weines ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur T_U und der aktuellen Temperatur T des Weines.

- 1) Stellen Sie diejenige Differenzialgleichung auf, die die Temperatur T des Weines während des Erwärmungsprozesses beschreibt. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k .
- 2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Erwärmungsprozess.
- 3) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Wein ausgehend von $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ eine Temperatur von $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ erreicht.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Ausdruck ist die mittlere Änderungsrate des Alkoholgehalts im Zeitintervall $[2; 4]$.

a2) Ermittlung der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$a(t) = 0,18 \cdot t^2 + 0,05 \cdot t + 0,51 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen

$a(t)$... Alkoholgehalt zur Zeit t in %

a3) $a(t) = 11$ oder $0,18 \cdot t^2 + 0,05 \cdot t + 0,51 = 11$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

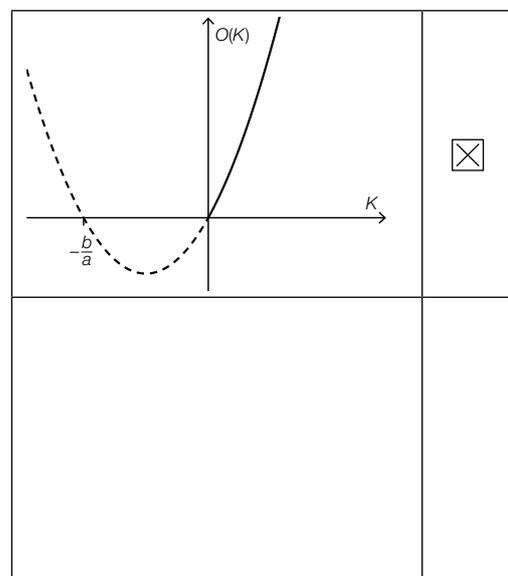
$$t_1 = 7,49\dots$$

$$(t_2 = -7,78\dots)$$

$$z(7,49\dots) = 0,31\dots$$

Der Zuckergehalt beträgt rund 0,3 %.

b1)



$$\text{c1) } \frac{dT}{dt} = k \cdot (20 - T)$$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

oder:

$$\int \frac{T'}{20 - T} dt = \int k dt$$

$$-\ln|20 - T(t)| = k \cdot t + C_1$$

$$20 - T(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(0) = 10 \quad \text{oder} \quad 20 - C \cdot e^{-k \cdot 0} = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 10$$

$$T(20) = 12 \quad \text{oder} \quad 20 - 10 \cdot e^{-k \cdot 20} = 12$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$k = 0,011157\dots$$

$$T(t) = 20 - 10 \cdot e^{-0,01116 \cdot t}$$

$$\text{c3) } T(t) = 15 \quad \text{oder} \quad 20 - 10 \cdot e^{-0,01116 \cdot t} = 15$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 62,1\dots$$

Der Wein erreicht nach rund 62 min eine Temperatur von 15 °C.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- a2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der quadratischen Ausgleichsfunktion
- a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Zuckergehalts
- b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
- c1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
- c2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (allgemeine Lösung der Differenzialgleichung)
- 1 × B1: für die richtige Berechnung der Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Erwärmungsprozess
- c3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Zeitdauer