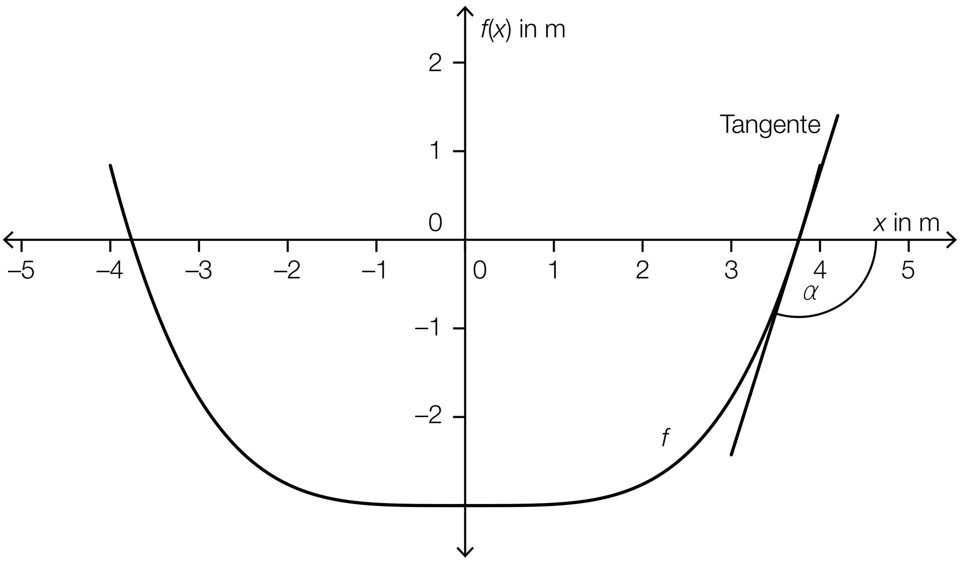
Wasserkanal

Die Querschnittsfläche eines bestimmten Kanals ist unten von einer Randkurve begrenzt, die mit der Funktion f beschrieben werden kann, wobei der Wasserspiegel genau entlang der x-Achse verläuft (siehe nachstehende Abbildung).

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 0{,}015 \cdot x^4 - 3$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

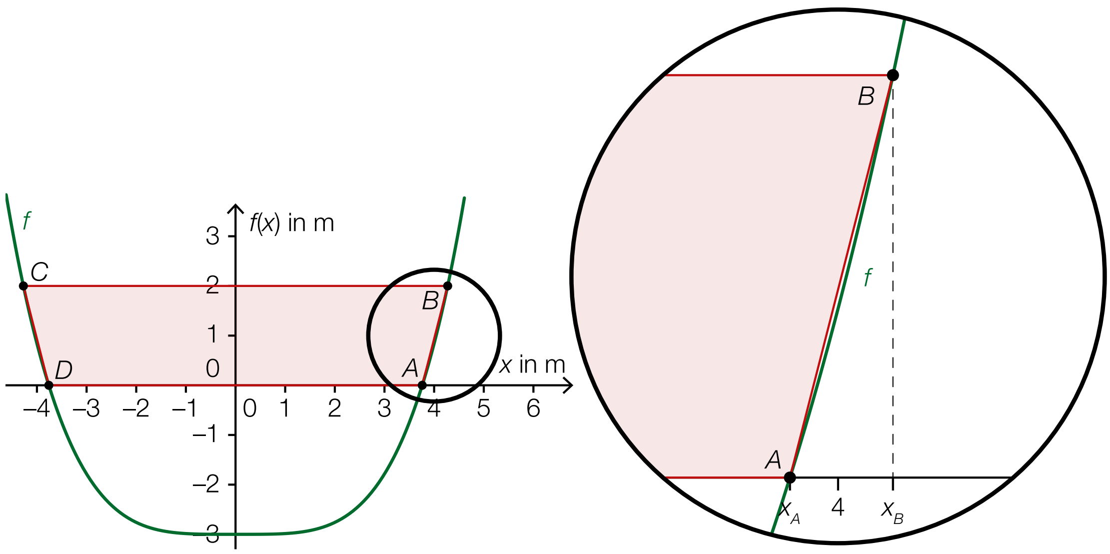


a) 1) Berechnen Sie mithilfe der Differenzialrechnung den Winkel α.

b) Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s durch den Kanal.

1) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen.

c) Die Kanalhöhe wird durch Verlängerung der Randkurve bis zu einer Höhe von 2 m über dem Wasserspiegel vergrößert.
Der Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche kann näherungsweise als Flächeninhalt des Vierecks *ABCD* bestimmt werden. Der Flächeninhalt dieses Vierecks ist um ΔF m² kleiner als der tatsächliche Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche (siehe nachstehende Abbildung).



vergrößertes Detail aus der Abbildung

1) Ergänzen Sie die nachstehende Formel für ΔF.

$$\Delta F = 2 \cdot \left(\frac{(x_B - x_A) \cdot f(\square)}{2} - \int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Möglicher Lösungsweg

a1) Nullstelle: $f(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -3{,}76...)$ $x_2 = 3{,}76...$

$f'(3{,}76...) = 3{,}19...$
$\alpha = 180° - \arctan(3{,}19...)$
$\alpha = 107{,}40...°$

b1) Berechnung der Nullstellen von f mittels Technologieeinsatz: $x_1 \approx -3{,}76$ m, $x_2 \approx 3{,}76$ m
$\int_{-3{,}76}^{3{,}76} (0{,}015 \cdot x^4 - 3)\,\mathrm{d}x = 18{,}05$
$A = 18{,}05$ m^2
$V = 18{,}05 \cdot 1{,}2 \approx 21{,}66$

Es fließen rund 21,66 m^3/s durch den Kanal.

c1) $\Delta F = 2 \cdot \left(\frac{(x_B - x_A) \cdot f(x_B)}{2} - \int_{x_A}^{x_B} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$