Bundesministerium für Bildung

Waschmittel (1)*

Aufgabennummer: B_376		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

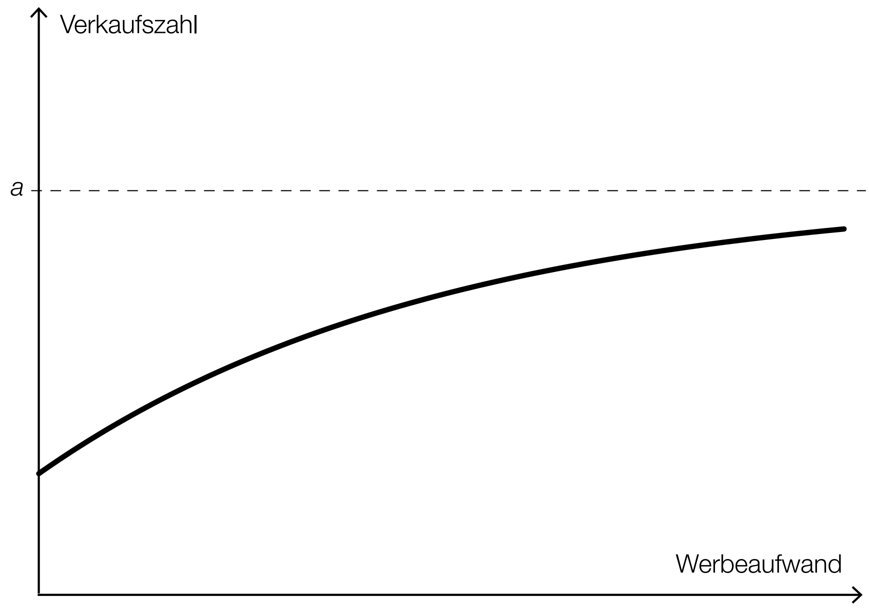
a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

– Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
– Begründen Sie mathematisch, warum für $x \to \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1:



– Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

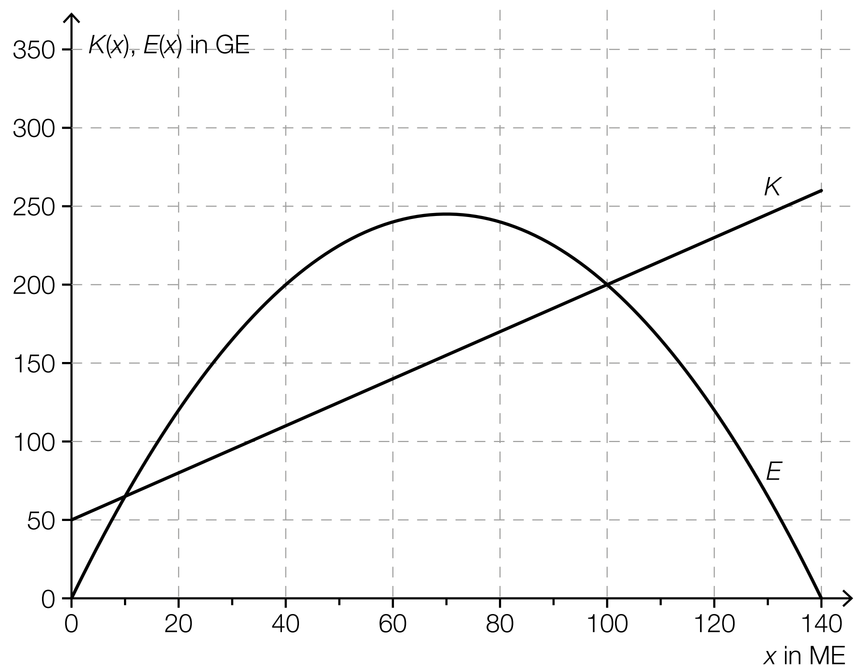
x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:
Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt:

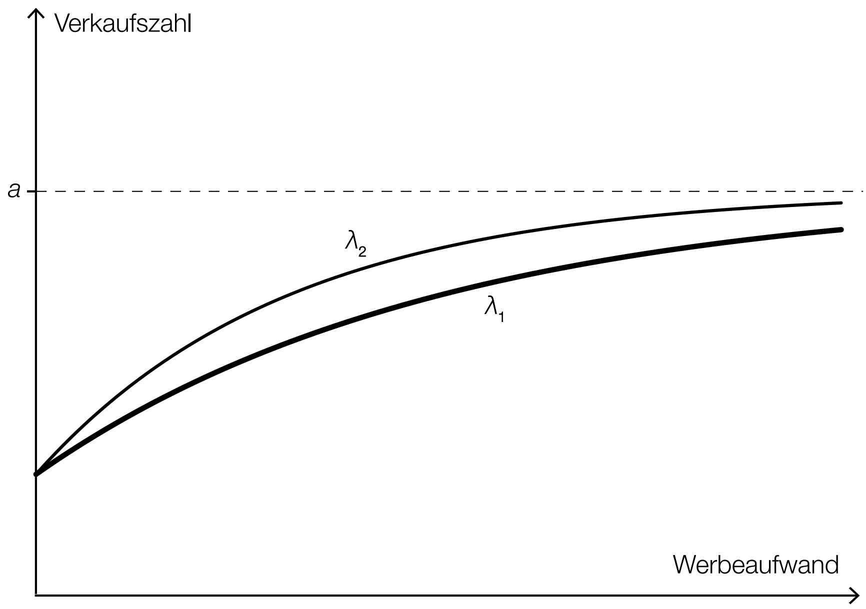


– Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.

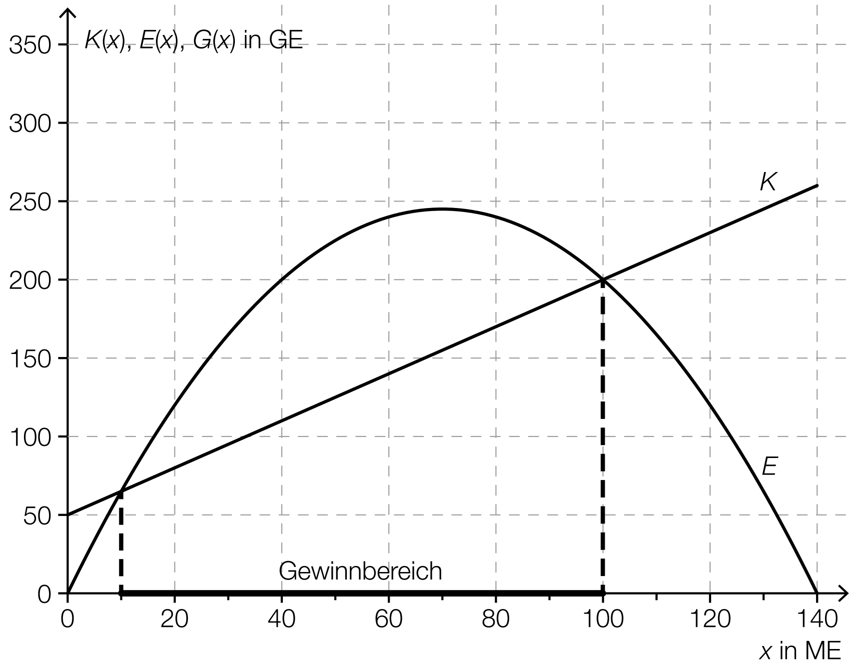


b) $K(0) = 500$: $500 = d$
$K(20) = 604$: $604 = 20^3 \cdot a + 20^2 \cdot b + 20 \cdot c + d$
$K(30) = 672$: $672 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$
$K(50) = 920$: $920 = 50^3 \cdot a + 50^2 \cdot b + 50 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{375}$, $b = -\frac{2}{25}$, $c = \frac{86}{15}$ und $d = 500$

c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$
$\Rightarrow$ $K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Verkaufszahl ohne Werbeaufwand unter Verwendung der Parameter der Funktion
1 × D: für die richtige Erklärung, warum für wachsende x die Verkaufszahlen V gegen a streben
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsverlaufs (Startwert und charakteristischer Verlauf einer Sättigungsfunktion, wobei die Kurve mit λ_2 oberhalb der gegebenen Kurve verläuft)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Parameter

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Gewinnbereichs
1 × D: für die richtige mathematische Erklärung