

# USB-Sticks

Aufgabennummer: B\_191

Technologieeinsatz:                      möglich                       erforderlich

Ein Unternehmen bringt USB-Sticks auf den Markt.

- a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne  $G$  in Abhängigkeit von der Absatzmenge  $x$  der Ware ermittelt:

$x$	0	10	20
$G(x)$	-1,4	6,4	1,4

$x$  ... Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)

$G(x)$  ... Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von  $x$  ME

Die Gewinnfunktion  $G$  wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$ .
- Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
- Beschreiben Sie, was der Parameter  $c$  in Bezug auf die Kosten aussagt.
- Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

- b) Die Erlösfunktion  $E$  beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1,25x^2 + 21x$$

$x$  ... Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)

$E(x)$  ... Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von  $x$  ME

- Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
- Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall  $[9; 15]$ .
- Berechnen Sie den maximalen Erlös.
- Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für ein lokales Maximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion  $p$  in Abhängigkeit von der Absatzmenge  $x$  an, die diese Kriterien erfüllt. [1 aus 5]

$x$  ... Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)

$p(x)$  ... Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME)  
bei einem Absatz von  $x$  in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	<input type="checkbox"/>
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	<input type="checkbox"/>
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	<input type="checkbox"/>
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	<input type="checkbox"/>
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	<input type="checkbox"/>

*Hinweis zur Aufgabe:*

*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.*

*Beachten Sie, dass die Funktionen – wie in der Wirtschaftsmathematik üblich – näherungsweise als stetig angenommen werden, obwohl es sich um diskrete Werte handelt.*

## Möglicher Lösungsweg

- a) Mit Einsetzen in  $G(x) = ax^2 + bx + c$  erhält man folgendes Gleichungssystem:
- $$\begin{aligned} G(0) = -1,4: & & c = -1,4 \\ G(10) = 6,4: & 10^2a + 10b = 6,4 + 1,4 \\ G(20) = 1,4: & \underline{20^2a + 20b = 1,4 + 1,4} \end{aligned}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:  
 $a = -0,064 \quad b = 1,42 \quad c = -1,4$   
 Gewinnfunktion  $G$  mit:  $G(x) = -0,064x^2 + 1,42x - 1,4$

$|c|$  gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die  $x$ -Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von  $G$  markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point“.

- b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.  
 Nullstellen der Erlösfunktion:  $-1,25x^2 + 21x = 0$ ,  
 $x_1 = 0$  (untere Erlösgrenze),  $x_2 = 16,8$  (obere Erlösgrenze)  $\Rightarrow D = [0; 16,8]$

mittlere Änderungsrate:

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(15) - E(9)}{15 - 9}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= -1,25x^2 + 21x \\ E'(x) &= -2,5x + 21 = 0 \\ x &= \frac{21}{2,5} = 8,4 \\ E(8,4) &= 88,2 \end{aligned}$$

Der maximale Erlös beträgt 88,2 GE.

*Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.*

Zum Nachweis eines lokalen Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion an der berechneten Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor. (Hinweis: Die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion an der Extremstelle wird vorausgesetzt.)

c)

[...]	
[...]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	
[...]	

## Klassifikation

Teil A             Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 4
- c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: —