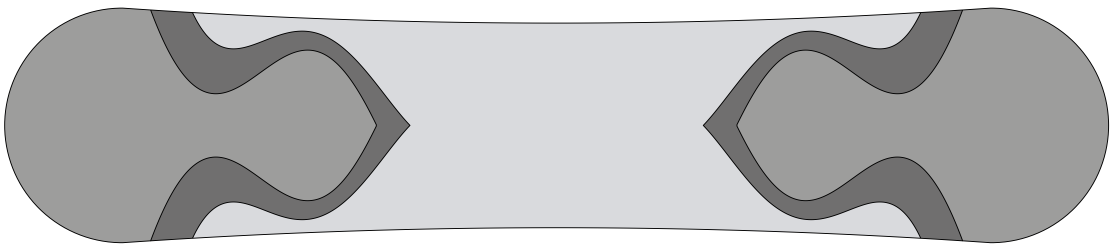
Snowboard (1)*

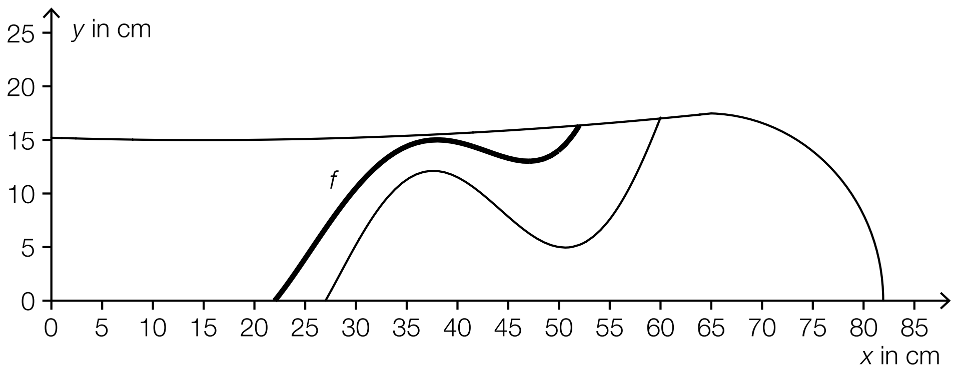
Aufgabennummer: B_392

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Design für ein Freestyle-Snowboard sieht folgendermaßen aus:



a) Das Snowboard-Design setzt sich aus 4 zueinander symmetrischen Elementen zusammen. Eines dieser Elemente ist in folgender Grafik dargestellt:



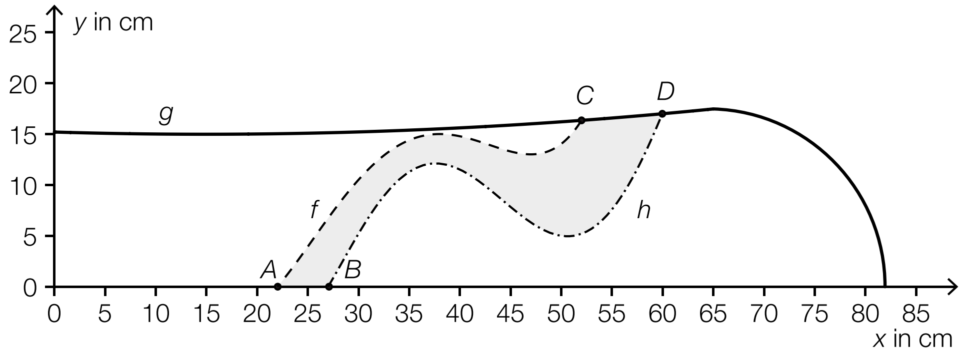
Die in der obigen Grafik markierte Kurve kann als Graph einer Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ dargestellt werden. Von dieser Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Bei $x = 22$ hat die Funktion f eine Nullstelle.
Der Punkt $(38|15)$ ist ein Hochpunkt.
Der Punkt $(47|13)$ ist ein Tiefpunkt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten dieser Polynomfunktion 4. Grades berechnen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die geschwungene Farbfläche des Snowboards wird durch die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* sowie die *x*-Achse begrenzt:



$A = (22|0)$
$B = (27|0)$
$C = (52|16{,}5)$
$D = (60|17)$

Im nachstehenden Ansatz zur Berechnung des Inhalts dieser grau markierten Fläche in cm^2 wurde eine Teilfläche nicht berücksichtigt.

$A_1 = \int_{22}^{27} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $A_2 = \int_{27}^{52} \left[f(x) - h(x)\right]\mathrm{d}x$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Grafik die fehlende Teilfläche.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_3 dieser Teilfläche auf.

$A_3 =$ ____

c) Die Kosten bei der Produktion von Snowboards einer *limited edition* können durch die Funktion K, der Erlös beim Verkauf kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}27 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 591{,}67 \cdot x + 10\,000$
$E(x) = 1\,000 \cdot x$

x ... Anzahl der Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x ME in GE

Es wird angenommen, dass alle produzierten Snowboards auch verkauft werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

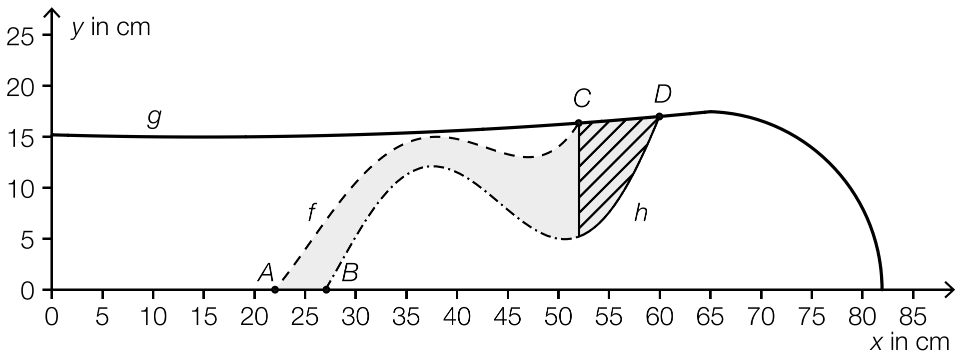
Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x)\right] \mathrm{d}x$$

c) $G(x) = -0{,}27 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 408{,}33 \cdot x - 10\,000$

$G'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 47{,}62\ldots \quad (x_2 = -10{,}58\ldots)$

$G(47{,}62\ldots) = 14\,303{,}372\ldots$

Der maximale Gewinn beträgt rund 14 303,37 GE.

Nullstellen der Gewinnfunktion: $G(x) = 0$

$(x_1 = -31{,}15\ldots)$

$x_2 = 17{,}07\ldots$

$x_3 = 69{,}63\ldots$

Der Gewinnbereich lautet: [17,1; 69,6].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs