

## Sedimente

Sedimente sind in Flüssigkeiten enthaltene Teilchen, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft ablagern.

- a) In einer Flüssigkeit sinkt ein Teilchen durch die Schwerkraft ab. Die Sinkgeschwindigkeit  $v$  kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 20 \cdot v$$

$t$  ... Zeit in s

$v$  ... Sinkgeschwindigkeit in m/s

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Differenzialgleichung diejenige Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. [0/1 P.]
- 3) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit  $v(0) = 0,2$ . [0/1 P.]

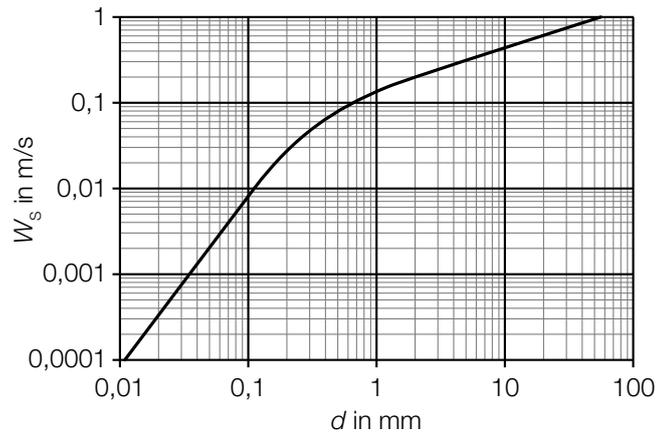
- b) Das Flussbett der Donau verändert sich ständig. Die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) an einer bestimmten Stelle des Flussbetts wurde wiederholt gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren	Seehöhe des Flussbetts in m
0	142,0
20	141,7
35	141,6
45	141,2
52	141,0

Die Seehöhe des Flussbetts soll in Abhängigkeit von der Zeit durch die quadratische Funktion  $f$  beschrieben werden.

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion  $f$  auf.  
 $t$  ... Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren  
 $f(t)$  ... Seehöhe des Flussbetts zur Zeit  $t$  in m [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie mithilfe der quadratischen Funktion  $f$  die Seehöhe des Flussbetts zu Beginn des Jahres 2010. [0/1 P.]

- c) Die Sinkgeschwindigkeit  $W_s$  von kugelförmigen Sandkörnern in Wasser hängt von deren Durchmesser  $d$  ab (siehe nachstehende Abbildung).



Bildquelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Settling\\_velocity\\_quartz.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Settling_velocity_quartz.png) [15.03.2019] (adaptiert).

Die Dichte  $\rho$  eines Sandkorns beträgt  $2650 \text{ kg/m}^3$ . Die Masse  $m$  ist das Produkt aus Dichte  $\rho$  und Volumen  $V$ , also  $m = \rho \cdot V$ .

Ein bestimmtes kugelförmiges Sandkorn hat eine Sinkgeschwindigkeit von  $0,2 \text{ m/s}$ .

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Masse  $m$  dieses Sandkorns. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit Gramm an. [0/1/2 P.]

Im Bereich  $0,01 \text{ mm} < d < 0,1 \text{ mm}$  ist der in der obigen Abbildung dargestellte Verlauf geradlinig. Daher kann die Sinkgeschwindigkeit  $W_s$  in Abhängigkeit vom Durchmesser  $d$  in diesem Bereich durch eine der unten stehenden Funktionsgleichungen beschrieben werden.

- 2) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an. [1 aus 5]  
 $a, c \dots$  positive Konstanten

[0/1 P.]

$W_s(d) = a \cdot c^d$	<input type="checkbox"/>
$W_s(d) = \frac{a}{d}$	<input type="checkbox"/>
$W_s(d) = a \cdot d^c$	<input type="checkbox"/>
$W_s(d) = a \cdot d + c$	<input type="checkbox"/>
$W_s(d) = a \cdot \ln(d) + c$	<input type="checkbox"/>

## Möglicher Lösungsweg

a1)  $0 = 10 - 20 \cdot v$   
 $v = 0,5$

Die Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist, beträgt 0,5 m/s.

a2)  $\int \frac{dv}{10 - 20 \cdot v} = \int dt$  oder  $\int \frac{v'}{10 - 20 \cdot v} dt = \int dt$   
 $\frac{\ln|10 - 20 \cdot v(t)|}{-20} = t + C_1$   
 $10 - 20 \cdot v(t) = e^{-20 \cdot t} \cdot C_2$   
 $v(t) = 0,5 - C \cdot e^{-20 \cdot t}$

a3)  $v(0) = 0,2$   
 $0,5 - C = 0,2$   
 $C = 0,3$   
 $v(t) = 0,5 - 0,3 \cdot e^{-20 \cdot t}$

- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Sinkgeschwindigkeit.  
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe der Methode *Trennen der Variablen*.  
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Lösung der Differentialgleichung mit  $v(0) = 0,2$ .

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = -0,0002763 \cdot t^2 - 0,004206 \cdot t + 141,98 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

b2)  $f(60) = 140,73\dots$

Zu Beginn des Jahres 2010 betrug die Seehöhe des Flussbetts rund 140,7 m.

- b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion  $f$ .  
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Seehöhe zu Beginn des Jahres 2010.

c1) Ablesen des Durchmessers eines Sandkorns mit Sinkgeschwindigkeit 0,2 m/s:

$$d = 2 \text{ mm} \Rightarrow r = 1 \text{ mm}$$

Berechnung des Volumens  $V$  dieses Sandkorns in  $\text{m}^3$ :

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \cdot 10^{-9} = 4,188... \cdot 10^{-9}$$

Berechnung der Masse  $m$  dieses Sandkorns in g:

$$m = \rho \cdot V = 2650 \cdot 4,188... \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 0,0111...$$

Die Masse des Sandkorns beträgt rund 0,011 g.

c2)

$W_s(d) = a \cdot d^c$	<input checked="" type="checkbox"/>

- c1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Durchmessers  $d$ .  
Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Masse  $m$  in Gramm.  
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.