Magneten

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein bestimmter Magnet wird nach dem Erhitzen abgekühlt.

a) Der Abkühlungsprozess A verläuft dabei modellhaft nach folgender Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_\mathrm{U} - T)$$

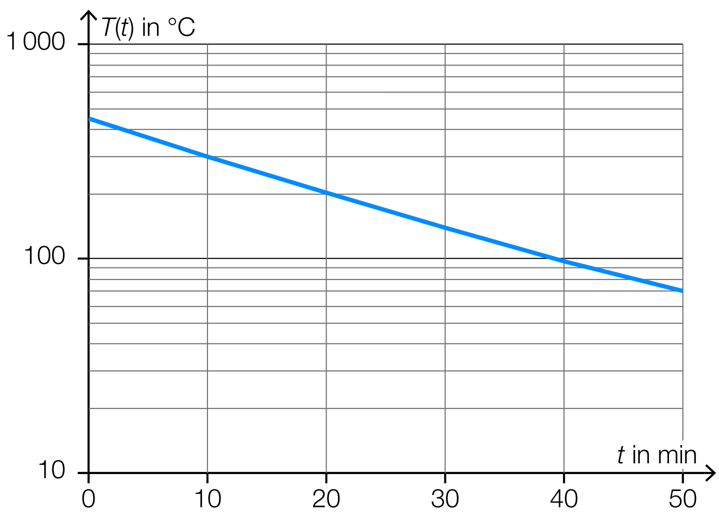
t … Zeit in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Magneten zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Proportionalitätsfaktor

1) Erklären Sie, warum der Proportionalitätsfaktor k für diesen Abkühlungsprozess positiv sein muss.
2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch *Trennen der Variablen*.

Es gilt: $T_\mathrm{U} = 30$ °C
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Magneten 440 °C.

3) Ermitteln Sie den Wert der Integrationskonstante.

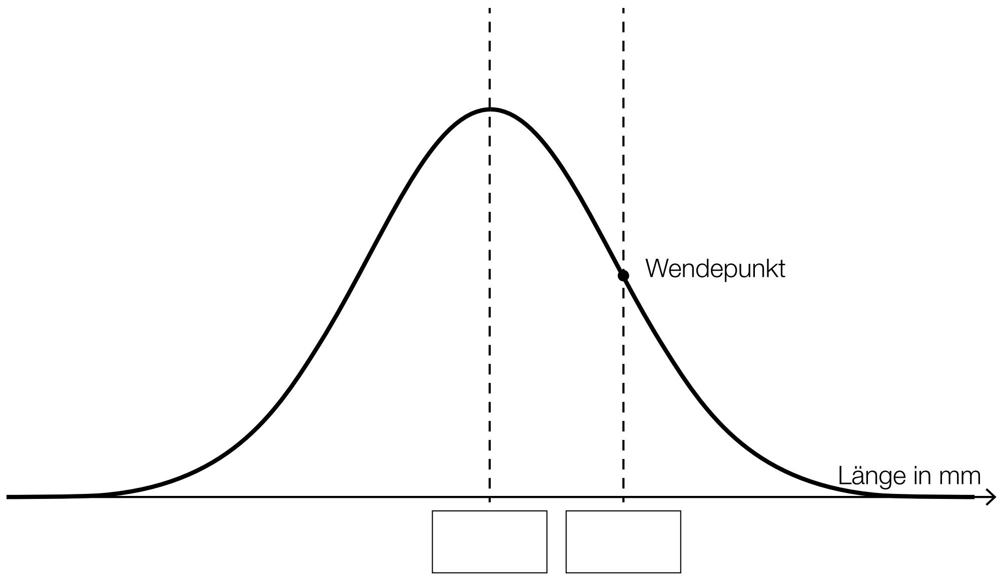
b) Der Abkühlungsprozess B lässt sich modellhaft durch die Funktion T beschreiben:
$T(t) = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot t}$



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung des Funktionsgraphen von T die Temperatur zur Zeit $t = 10$ min ab.
2) Berechnen Sie k mithilfe des abgelesenen Werts.

c) Die erforderliche Länge (= Sollwert) der Magneten für den Einbau in elektronische Geräte ist 2,5 mm.
Messungen haben ergeben, dass die Länge des Magneten näherungsweise normalverteilt ist mit dem Erwartungswert μ = 2,5 mm und der Standardabweichung σ = 0,05 mm.
X ... Länge des Magneten in mm

1) Tragen Sie in der nachstehend abgebildeten Dichtefunktion die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Magnete werden aussortiert, wenn ihre Länge nicht im Intervall [2,4 mm; 2,6 mm] liegt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Magnet aussortiert wird.
3) Ermitteln Sie, welche Standardabweichung erforderlich wäre, wenn nur 1 % der Magnete aussortiert werden soll.

Möglicher Lösungsweg

a1) Beim Abkühlprozess ist der Klammerausdruck $T_U - T$ negativ. Da die Änderung $\frac{dT}{dt}$ negativ ist, muss der Proportionalitätsfaktor k positiv sein.

a2) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$

$\frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot dt$

$\int \frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot \int dt$

$\ln|T - T_U| = -k \cdot t + C_1$

$T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$

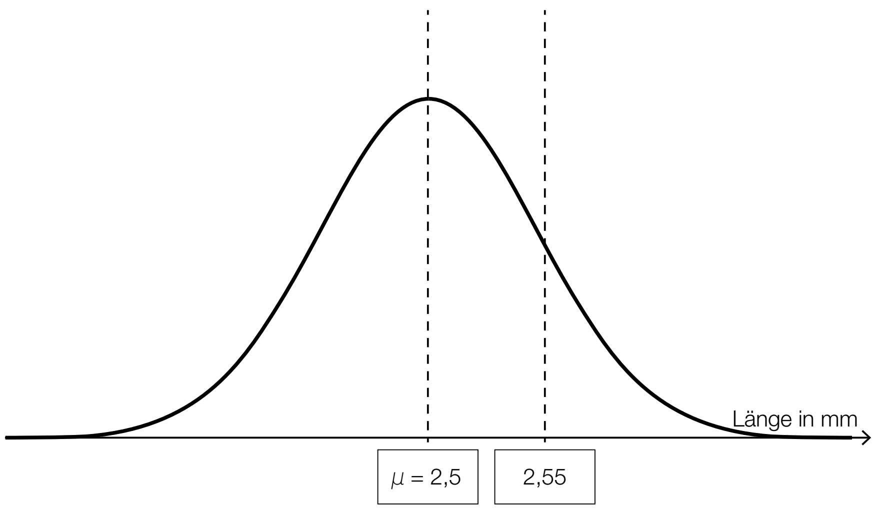
a3) $440 = 30 + C \cdot e^{-k \cdot 0}$
$C = 410$

b1) $T = 300$ °C

b2) $300 = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot 10}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$k = 0{,}04289...$

c1)



c2) $1 - P(2{,}4 \leq X \leq 2{,}6) \approx 0{,}0455$

c3) $P(X \leq 2{,}6) = 0{,}995$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 0{,}0388...$ mm