Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Länge eines Werkstücks

Aufgabennummer: B_309

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm und $\sigma = 0{,}5$ mm.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

– Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ an.
– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstreubereichs halbiert.
– Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 7$ größer ist als jenes für $n = 5$.

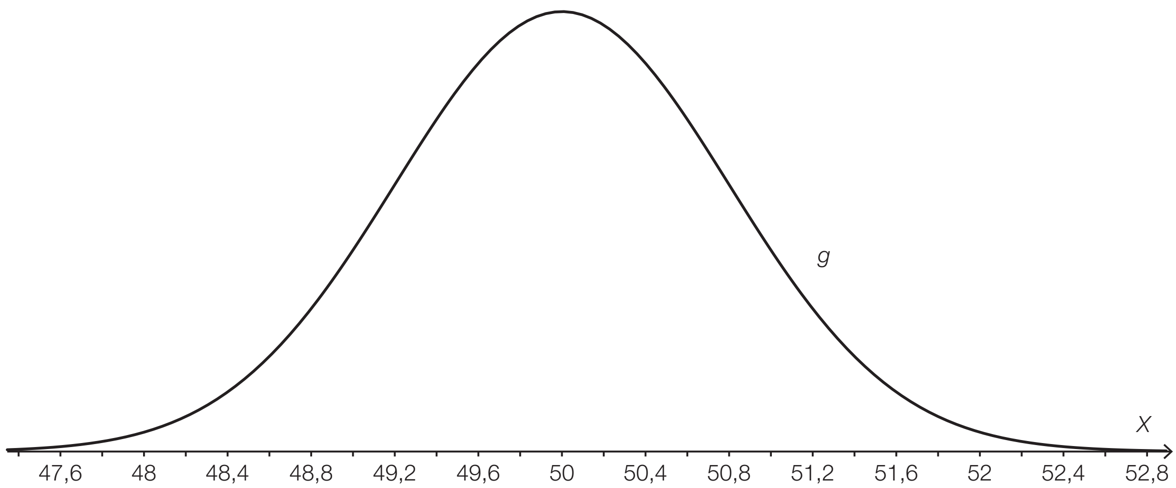
b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm.
Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
Abweichungen von bis zu $\pm 0{,}9$ mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie für eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}5$ mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird.
– Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Zufallsvariablen X dargestellt.

– Begründen Sie mithilfe der Dichtefunktion, warum für die zugehörige Verteilungsfunktion G gilt: $G(\mu) = 0{,}5$.
– Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $1 - G(51)$ in der unten stehenden Abbildung.
– Lesen Sie aus dem Graphen der Dichtefunktion die Standardabweichung σ ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{X}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \sigma_{\bar{X}}$
$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

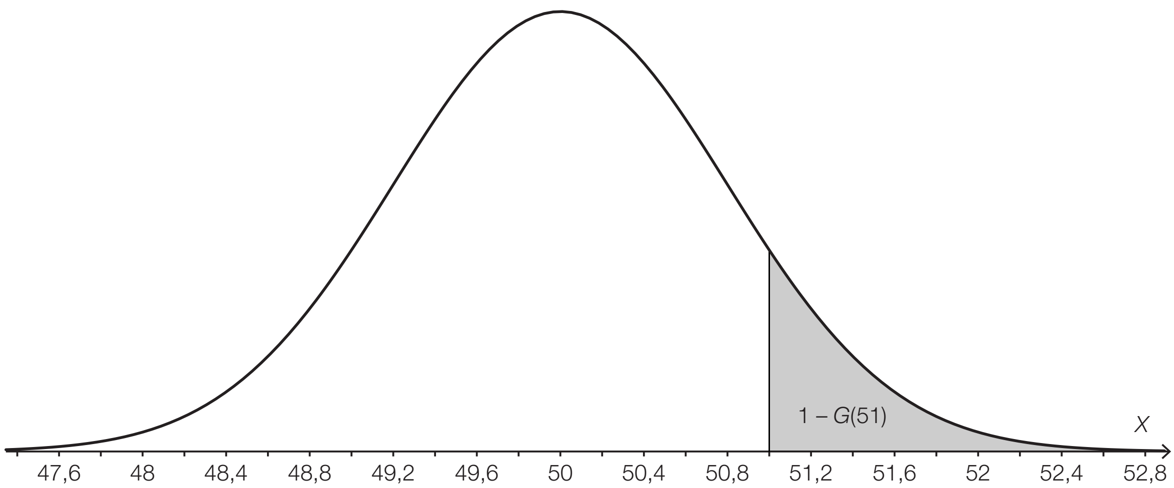
b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71{,}4 \leq X \leq 73{,}2) = 0{,}0718\ldots \approx 7{,}2\ \%$

$$\sigma = \frac{x_{ob} - \mu}{u_{0{,}99}} = \frac{73{,}2 - 72{,}3}{2{,}326...} = 0{,}38\ldots \approx 0{,}4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ.

Daher gilt: $G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.



$\sigma = 0{,}8$ mm
Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
1 × C: für eine richtige Beschreibung
1 × D: für eine richtige Begründung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

c) 1 × D: für eine richtige Begründung
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0]