Halterungen für Glasfassaden

Aufgabennummer: B_024

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5\,000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

x … Stückzahl mit $0 \leq x \leq 5\,000$
$K(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

a) Der Betrieb möchte die Produktionskosten pro Stück möglichst gering halten. Die Produktionskosten pro Stück bezeichnet man als Stückkosten.

– Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
– Bestimmen Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
– Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremum um ein lokales Minimum handelt.

b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Die Produktionskosten für ein anderes Produkt werden mit der Funktion K_1 beschrieben:

$K_1(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}055 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$ mit $0 \leq x \leq 1\,000$

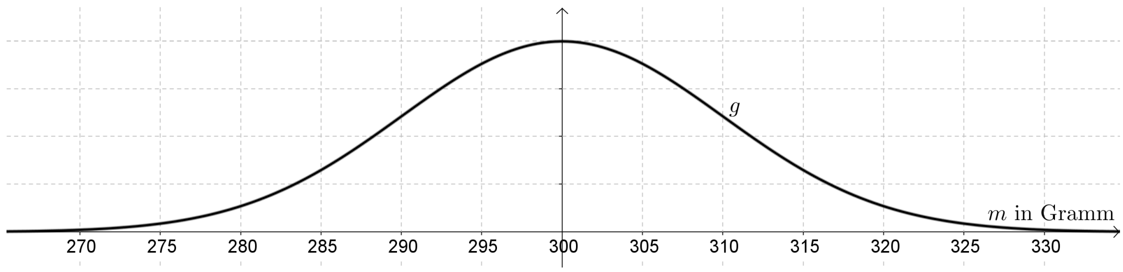
x … Stückzahl
$K_1(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K_1.
– Argumentieren Sie, warum die Funktion K_1 als Kostenfunktion nicht in Frage kommt.

d) Ein Abnehmer bezieht die Halterung in sehr großer Stückzahl. Er nimmt die Lieferung an, wenn er bei einer Zufallsstichprobe von 50 Stück höchstens eine fehlerhafte Halterung findet. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Halterung in der gesamten Lieferung beträgt erfahrungsgemäß 2 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung.
– Begründen Sie die Verwendung der von Ihnen gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

e) Die Masse m der Halterung in Gramm ist annähernd normalverteilt. Die nachstehende Grafik stellt die Dichtefunktion g dar.



– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der gegebenen Grafik ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}00001 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x + 24 + \frac{3\,500}{x}$

Ableitung: $\overline{K}'(x) = 0{,}00002 \cdot x - 0{,}025 - \frac{3\,500}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0$ ergibt $x \approx 1\,346{,}519$.

Stückkosten: $\overline{K}(1\,347) \approx$ € 11,067

2. Ableitung: $\overline{K}''(x) = 0{,}00002 + \frac{7\,000}{x^3}$ und damit $\overline{K}''(1\,346{,}519) \approx 0{,}000023$

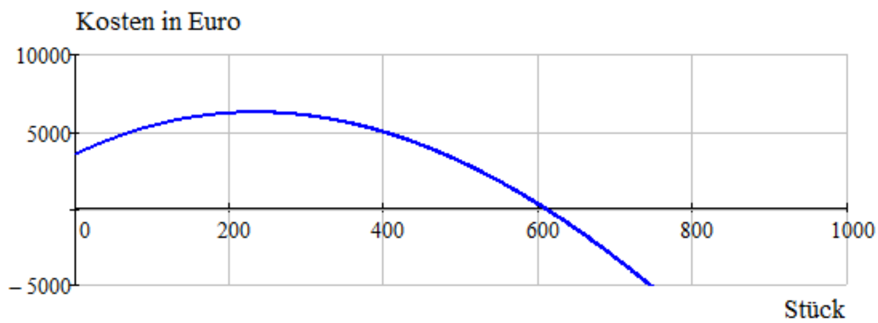
Die Stückkosten sind bei einer Produktionsmenge von 1 347 Stück am geringsten.
Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

b) Gewinnfunktion: $G(x) = 20 \cdot x - K(x) = -0{,}00001 \cdot x^3 + 0{,}025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3\,500,\ x \geq 0$

$G(x) = 0$ ergibt $x \approx 536{,}1$ und $x \approx 2\,253{,}6$.

Das ergibt einen Gewinnbereich von 537 Stück bis 2 253 Stück.

c)



Die Funktion kommt als Kostenfunktion nicht in Frage, weil ab etwa 600 Stück die Kosten negativ wären.

d) Unter der Annahme einer Binomialverteilung ist $P(X \leq 1) = 0{,}7357\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.
Gleichwertige Lösungen mit entsprechender Begründung werden anerkannt.

- Es gibt genau zwei Möglichkeiten für den Ausgang des Zufallsexperiments: Eine Halterung ist entweder fehlerfrei oder fehlerhaft.
- Die Ereignisse sind voneinander unabhängig: Zufallsstichprobe.
- Die Wahrscheinlichkeit p bleibt konstant: $p = 2$ %.

e) abgelesene Werte: $\mu = 300$ g, $\sigma = 10$ g
Ablesetoleranz für σ: [7; 13]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik
e) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —
e) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz
e) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren
e) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht
d) mittel
e) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2
d) 2
e) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –