Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

# Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B_130

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Grenzkostenfunktion $K'$ bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K$.
Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion $K_1'$ (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion $K_2'$ (Abb. 2) beschrieben werden.

$x$ … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K_1'(x)$, $K_2'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei $x$ erzeugten Stk.

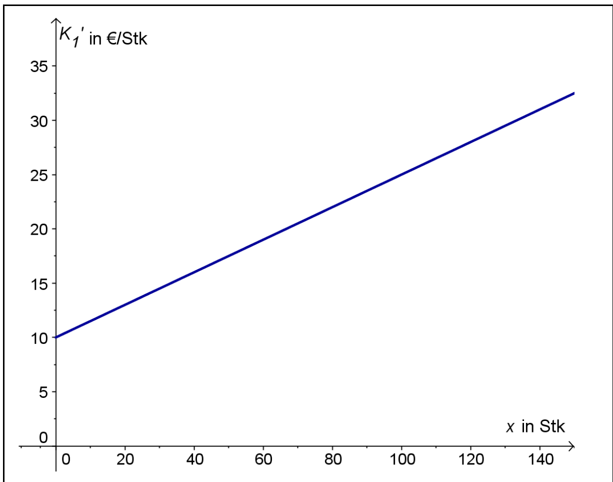



Abb. 1

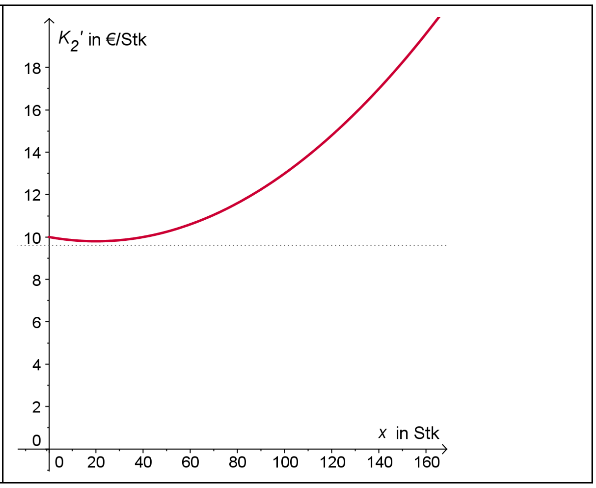



Abb. 2

a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion $K_1'$ aus dem Graphen der Abb. 1.
– Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion $K_1'$ die Gesamtkostenfunktion $K_1$, wenn die Fixkosten € 260 betragen.

b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

– Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
– Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0{,}0006x^3 + 0{,}02x^2 + 10x + 250$$

$x$ … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K(x)$ … Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von $x$ Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion $K'$ und der Stückkostenfunktion $\overline{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich [0;250] die Graphen der beiden Funktionen $K'$ und $\overline{K}$ in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

*Hinweis zur Aufgabe:*
*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.*

# Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $d = 10$

*Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.*
*Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.*

$K_1'(x) = 0{,}15x + 10$

$K_1(x) = \int (0{,}15x + 10)\mathrm{d}x$

$K_1(x) = 0{,}075x^2 + 10x + 260$

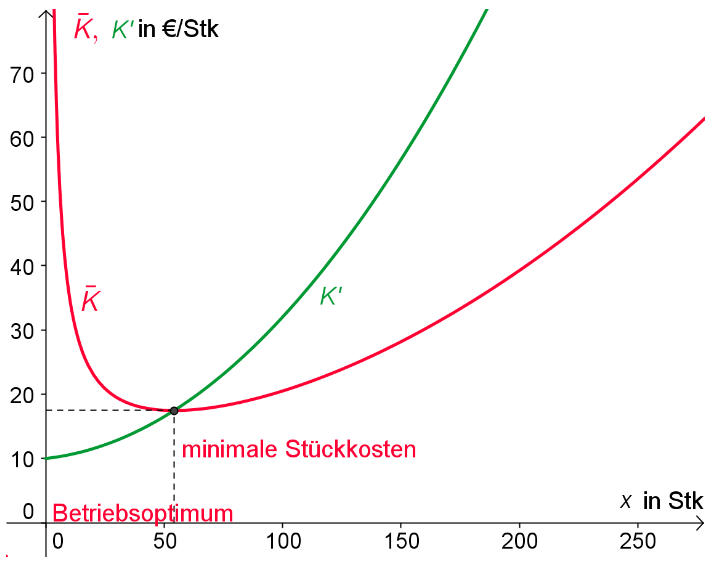
b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der $x$-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0{,}0018\,x^2 + 0{,}04x + 10$

$\overline{K}(x) = 0{,}0006x^2 + 0{,}02x + 10 + \frac{250}{x}$




Die $x$-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen $y$-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

# Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –