

## Fußballtore

Aufgabennummer: B\_279

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Betrieb produziert Fußballtore.

a) Die Preisfunktion der Nachfrage  $p_N$  ist bekannt:

$$p_N(x) = -40 \cdot x + 920 \text{ mit } 0 \leq x \leq 23$$

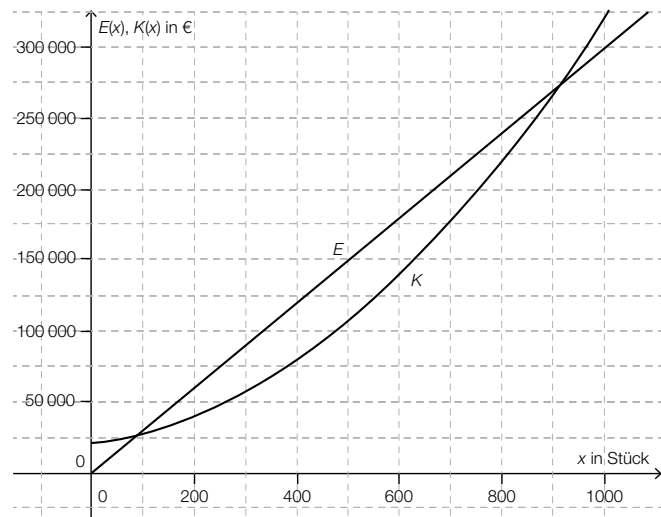
$x$  ... nachgefragte Menge in ME

$p_N$  ... Preis bei der Nachfrage  $x$  in GE/ME

- Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion  $E$  auf.
- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion  $E$  für den angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem.
- Lesen Sie aus der Grafik diejenige Menge ab, bei der der maximale Erlös erzielt wird.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Gesamtkostenfunktion  $K$  und der Erlösfunktion  $E$  für Trainingstore dargestellt.

- Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Gewinnbereich.
- Lesen Sie aus der Abbildung die Werte für die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze ab.
- Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung jene Anzahl  $x_{\max}$  ermittelt, für die der größte Gewinn erzielt wird, wenn die Funktionsgleichungen von  $E$  und  $K$  bekannt sind.



- c) Für die Fußballtore werden Netze produziert.  
Die Fixkosten betragen € 3.000.  
Bei der Produktion von 10 Netzen betragen die Stückkosten € 320 pro Netz.  
Bei der Produktion von 100 Netzen betragen die Gesamtkosten € 5.450.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Gesamtkostenfunktion ermittelt werden können.
  - Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.
- d) Für nichtlineare Gesamtkostenfunktionen gilt: Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der Stückkostenfunktion an der Stelle des lokalen Stückkostenminimums.
- Zeigen Sie die Richtigkeit dieses Sachverhalts mithilfe der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

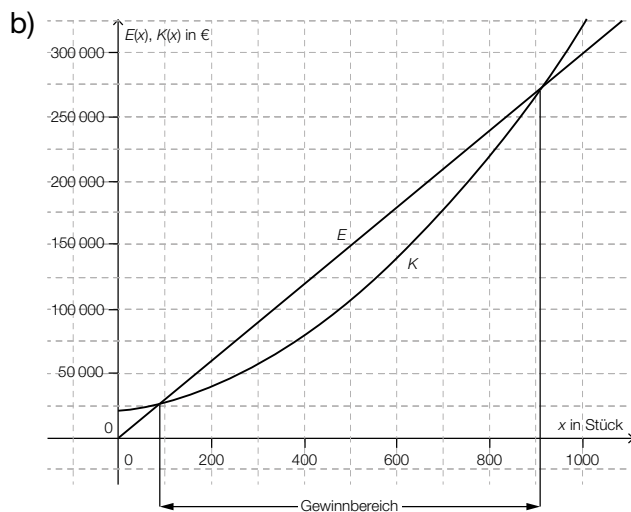
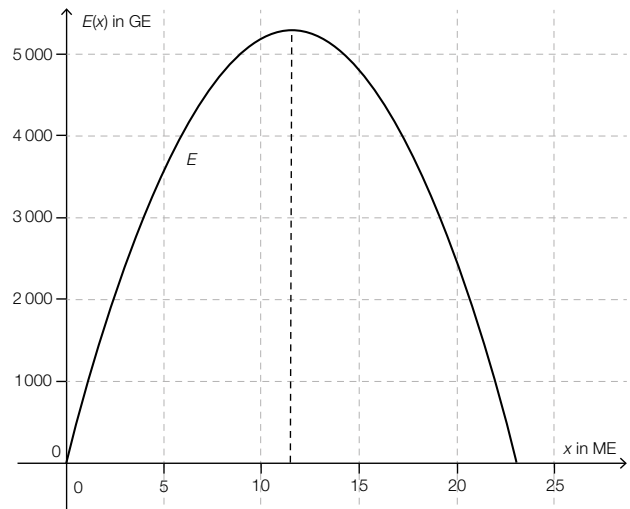
*Hinweis zur Aufgabe:*

*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.*

## Möglicher Lösungsweg

a)  $E(x) = p_N(x) \cdot x$   
 $E(x) = -40 \cdot x^2 + 920 \cdot x$

Der maximale Erlös wird  
bei  $x = 11,5$  ME erzielt.  
(Ablesetoleranz:  $\pm 0,5$  ME)



Gewinnschwelle bei  $x \approx 90$  Stück  
obere Gewinnngrenze bei  $x \approx 910$  Stück  
(Ablesetoleranz:  $\pm 10$  Stück)

Zuerst wird die Gewinnfunktion  $G$   
ermittelt:  $G(x) = E(x) - K(x)$   
Das Lösen der Gleichung  $G'(x) = 0$   
liefert die Stückzahl  $x_{\max}$ , für die der maxi-  
male Gewinn erzielt wird (Überprüfung  
des Maximums mit  $G''(x_{\max}) < 0$ ).

$$c) K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = a \cdot x + b + \frac{c}{x}$$

$x$  ... Anzahl der produzierten Netze

$K(x)$  ... Gesamtkosten bei der Produktion von  $x$  Netzen in €

$\bar{K}(x)$  ... Stückkosten bei der Produktion von  $x$  Netzen in € pro Netz

$$\text{I: } K(0) = 3000 \quad \Rightarrow \quad c = 3000$$

$$\text{II: } \bar{K}(10) = 320 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot a + b + 0,1 \cdot c = 320$$

$$\text{III: } K(100) = 5450 \quad \Rightarrow \quad 10000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 5450$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0,1 \\ 10000 & 100 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 320 \\ 5450 \end{pmatrix}$$

d) Das lokale Minimum der Stückkostenfunktion ermittelt man durch das Nullsetzen ihrer 1. Ableitung:

$$\left( \frac{K(x)}{x} \right)' = 0$$

Die Quotientenregel liefert:

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{K(x)}{x} \quad (\text{Grenzkosten} = \text{Stückkosten})$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von Grenzkostenfunktion und Stückkostenfunktion.

# Klassifikation

- Teil A       Teil B

## Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 4 Analysis

## Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge
- d) —

## Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

## Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) —
- d) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

## Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel
- d) schwer

## Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3
- d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —