

Wushan-Brücke

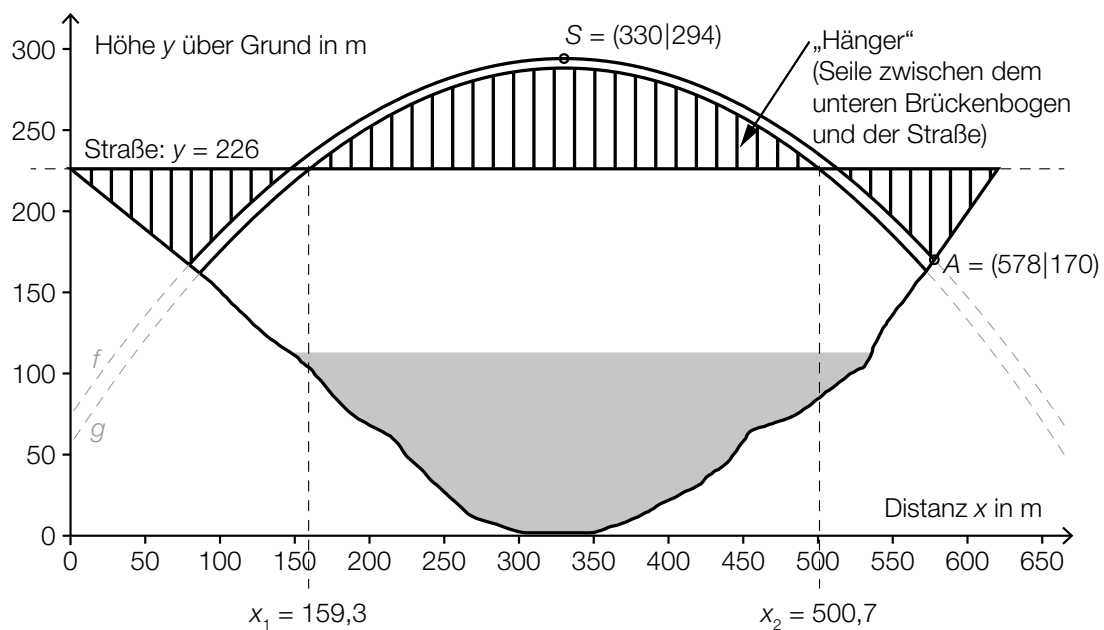
Aufgabennummer: A_177

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt:



Die obige Abbildung stellt die Geometrie der Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f . Die Stellen x_1 und x_2 markieren die Schnittpunkte des unteren Brückenbogens mit der Straße $y = 226$.

a) – Erstellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f .

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \quad \text{mit} \quad 86 \leq x \leq 574$$

Jemand stellt zur Berechnung der Höhe $H(x)$ der Hänger an der Stelle x folgende Formel auf:

$$H(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79760) \quad \text{für} \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

– Weisen Sie die Korrektheit dieser Formel nach.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \text{ m/s}$ von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe (über Grund) des Steins näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$$

t ... Zeit in s

$h(t)$... Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m

g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$)

- Berechnen Sie diejenige Zeit t_a , die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.
- Stellen Sie eine Gleichung der Funktion v für die Geschwindigkeit des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ f'(x) &= 2 \cdot a \cdot x + b \end{aligned}$$

$$f(330) = 294 \Rightarrow 330^2 \cdot a + 330 \cdot b + c = 294$$

$$f(578) = 170 \Rightarrow 578^2 \cdot a + 578 \cdot b + c = 170$$

$$f'(330) = 0 \Rightarrow 660 \cdot a + b = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -\frac{1}{496} = -0,0020\dots, b = \frac{165}{124} = 1,3306\dots, c = \frac{9231}{124} = 74,4435\dots$$

$$f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$$

b) Anwendung der binomischen Formel und Vereinfachung:

$$\begin{aligned} H(x) = g(x) - 226 &= -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 62 = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2) + 62 \\ &= -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2 - 62 \cdot 470) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79760) \end{aligned}$$

$$\text{c) } 113 = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t_a = 4,317\dots$ (oder $t_a = -5,336\dots$)

Der Stein benötigt bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche rund 4,32 s.

$$v(t) = |h'(t)|$$

$$v(t) = g \cdot t + 5$$

$v(t)$... Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

(Eine Angabe der Geschwindigkeit mit negativem Vorzeichen, also $v(t) = -g \cdot t - 5$, ist ebenfalls möglich.)

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) –
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: www.highestbridges.com/,

Rrm998 – Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YangtzeRiver-Bridge.jpg>