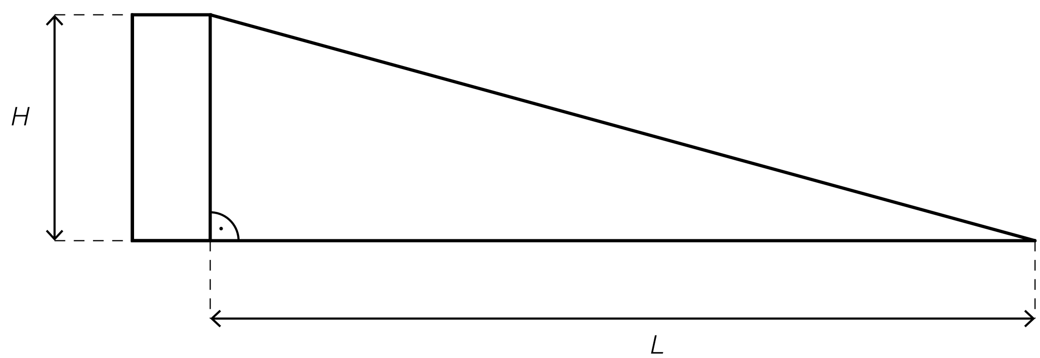
Skatepark (1)*

Aufgabennummer: A_194

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein *Skatepark* ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.

a) Im einfachsten Fall ist eine Startrampe eine geneigte ebene Fläche.
In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Startrampe dargestellt.



Ein Hersteller von Startrampen gibt folgende Maße an:

Höhe H: 1,45 m
Länge L: 5,3 m

Eine Norm schreibt vor, dass die Steigung maximal 20 % betragen darf.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Norm eingehalten wird.

b) Der Verlauf einer anderen Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden:

$$f(x) = \frac{1}{320} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 160$$

x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

– Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

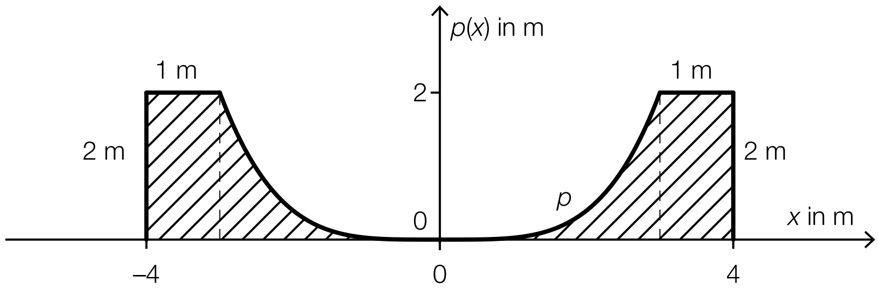
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \leq x \leq 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

d) Eine *Quarterpipe* ist so konstruiert, dass die Skater/innen an der Kante senkrecht nach oben springen können. Die Höhe über der Absprungkante, die sie dabei erreichen, lässt sich durch die Weg-Zeit-Funktion h beschreiben:

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe über der Absprungkante zur Zeit t in m
v_0 ... Geschwindigkeit der Skaterin/des Skaters an der Absprungkante in m/s
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

In einem Lehrbuch findet man folgende Rechnung ausgeführt:

$h'(t) = v_0 - g \cdot t$

$0 = v_0 - g \cdot T$

$T = \frac{v_0}{g}$

$H = h(T) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$

– Interpretieren Sie, was mit T und H in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Steigung: $k = \frac{1{,}45}{5{,}3} \approx 0{,}273...$

Die Rampe hat eine Steigung von über 27 %. Die Norm wird nicht eingehalten.

b) Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat:
$\tan(30°) = f'(x)$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{160} \cdot x \;\Rightarrow\; x = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{80}{3} \approx 26{,}7$

Die Rampe hat in einer Höhe von rund 26,7 cm einen Steigungswinkel von 30°.

c) Inhalt der Querschnittsfläche zwischen $x = 0$ und $x = 3$:

$\int_0^3 \frac{2}{81} \cdot x^4 \, dx = \frac{2}{81} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^3 = 1{,}2$

Inhalt der gesamten Querschnittsfläche: $A = 2 \cdot (2 + 1{,}2) = 6{,}4$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt 6,4 m².

d) T ist der Zeitpunkt, an dem die Skaterin/der Skater die maximale Höhe erreicht.
H ist die Höhe zum Zeitpunkt T, also die maximale Höhe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für eine richtige Überprüfung

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des bestimmten Integrals
1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der schraffierten Querschnittsfläche

d) 1 × C: für die richtige Interpretation von T und H im Sachzusammenhang