Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B_368

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus das Medikament E her.
Die Produktionsverflechtung ist im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (alle Angaben in ME).

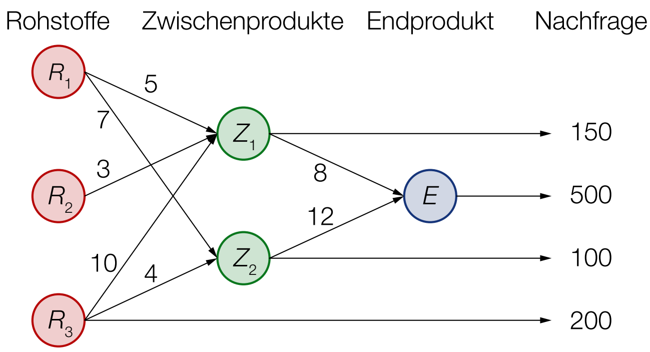

Abbildung 1

a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.

– Geben Sie an, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.

– Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten Rohstoffmengen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.

– Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Medikaments E.

b) Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen Rohstoffen, den Zwischenprodukten und dem Medikament.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Der Vektor $\vec{n}$ beschreibt die in der obigen Abbildung dargestellte Nachfrage nach R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Erstellen Sie den Vektor $\vec{n}$.

Der Vektor $\vec{x}$ beschreibt die benötigten Mengen an R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$.

c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von R_1, 20 000 ME von R_2 und 76 800 ME von R_3.
Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Medikaments E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.
Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte. Die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung des Medikaments.

– Erstellen Sie die beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot 600$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

– Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

R_1: $5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$
R_2: $3 \cdot 8 = 24$
R_3: $10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1, 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

b) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Der Rechenweg für $\vec{x}$ ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \\ x_2 &= 3 \cdot x_4 \\ x_3 &= 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200 \\ x_4 &= 8 \cdot x_6 + 150 \\ x_5 &= 12 \cdot x_6 + 100 \\ x_6 &= 500 \end{aligned} \qquad \text{Dabei gilt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Vektor $\vec{x}$:
$x_1 = 63\,450$; $x_2 = 12\,450$; $x_3 = 66\,100$; $x_4 = 4\,150$; $x_5 = 6\,100$; $x_6 = 500$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-7&0\\0&1&0&-3&0&0\\0&0&1&-10&-4&0\\0&0&0&1&0&-8\\0&0&0&0&1&-12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix};\quad (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&5&7&124\\0&1&0&3&0&24\\0&0&1&10&4&128\\0&0&0&1&0&8\\0&0&0&0&1&12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor } \vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}63\,450\\12\,450\\66\,100\\4\,150\\6\,100\\500\end{pmatrix}$$

c) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$

Es wird der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung von 600 ME des Medikaments E berechnet.

benötigte Rohstoffmengen: $\left[\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}\right]\cdot 600=\begin{pmatrix}74\,400\\14\,400\\76\,800\end{pmatrix}$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5 600 ME übrig, R_3 wird zur Gänze verbraucht.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –