

LED-Lampen (2)*

Aufgabennummer: B_315

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

- a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1 000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich.

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung ...	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen.

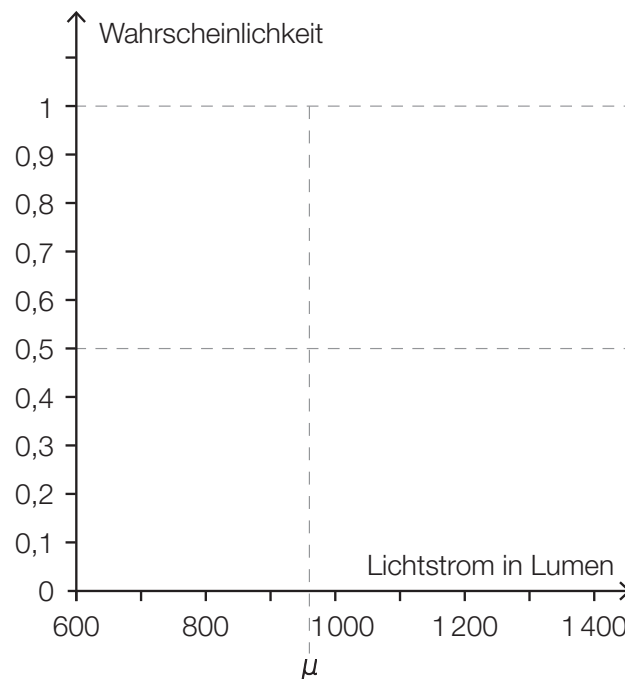
* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro/Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

- Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
 - Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
 - Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.
- c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
- Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
- Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



- Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung ...	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(x) = 0,026 \cdot x + 1,534$$

x ... Lichtstrom in Lumen

$f(x)$... Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$$f(500) \approx 14,53$$

Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

$$c) \mu = \frac{780 + 1140}{2} = 960$$

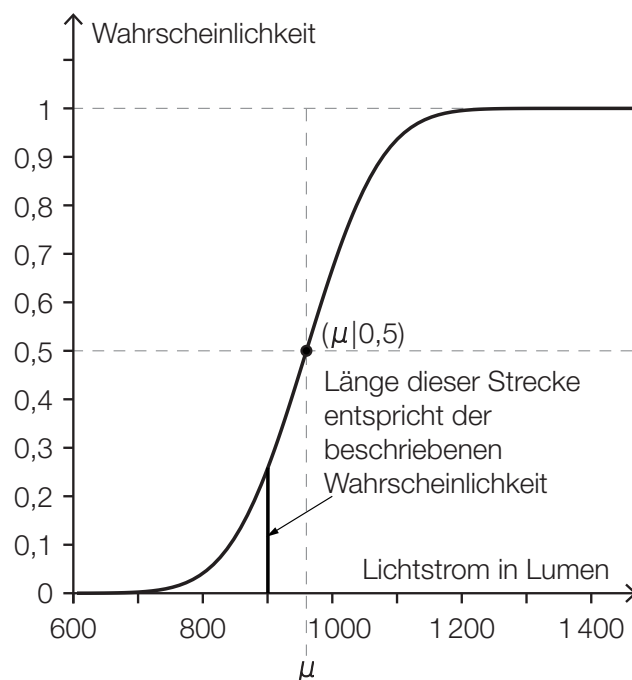
Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1140) = 0,975$

$$\Phi(z) = 0,975 \Rightarrow z = 1,959\dots$$

$$\sigma = \frac{1140 - 960}{1,959\dots} = 91,8\dots$$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung