

Kfz-Bestand (1)*

Aufgabennummer: B_300

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

- a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.
- 1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.
 - 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.
 - 3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

- b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6,3}{4,5}} = 1,0169\dots$$

$$1,0169\dots - 1 = 0,0169\dots \approx 1,7 \%$$

- 1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1,0169\dots^t$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,0169\dots)} = 41,20\dots \approx 41,2$$

- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K_B(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können.
- 2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ .
- 3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020.

- d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22,5}{3 + 2 \cdot e^{-0,06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K_L(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

- 1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$K(t) = 0,084 \cdot t + 4,6$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

$$\text{a3) } K(t) = 8 \quad \text{oder} \quad 0,084 \cdot t + 4,6 = 8$$

$$t = 40,47\dots$$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

$$\text{c1) } K_B(0) = 4,5$$

$$K_B(20) = 6,3$$

oder:

$$9 - b = 4,5$$

$$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6,3$$

$$\text{c2) } b = 9 - 4,5 = 4,5$$

$$\lambda = \frac{\ln(4,5) - \ln(2,7)}{20} = 0,025541\dots$$

$$\text{c3) } K_B(28) = 6,79\dots$$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

d1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-0,06264 \cdot t}$ gegen null, der Nenner also gegen 3 und damit der Funktionswert gegen 7,5.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
- a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
- a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
- b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
- b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang
- c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
- c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Parameter b und λ
- c3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020
- d1) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation