Grenzkosten (1)*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

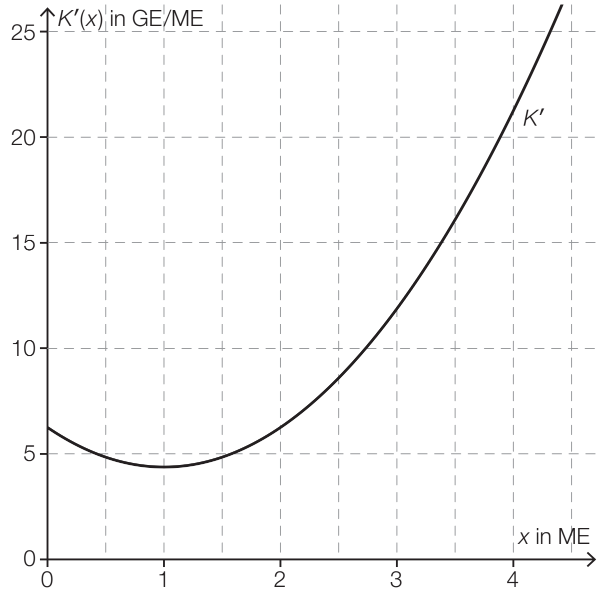
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

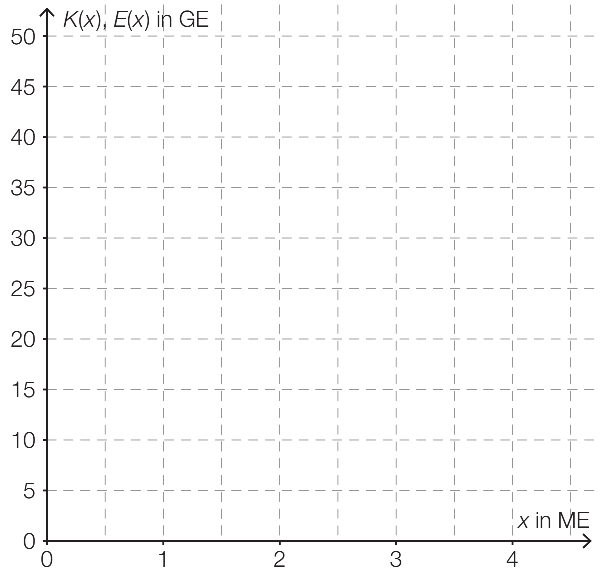
– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Grenzkostenwert 1 060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1 060 GE führen wird.

$K'(20) = 1\,060$
$K'(50) = 7\,120$
$K'(60) = 10\,340$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$

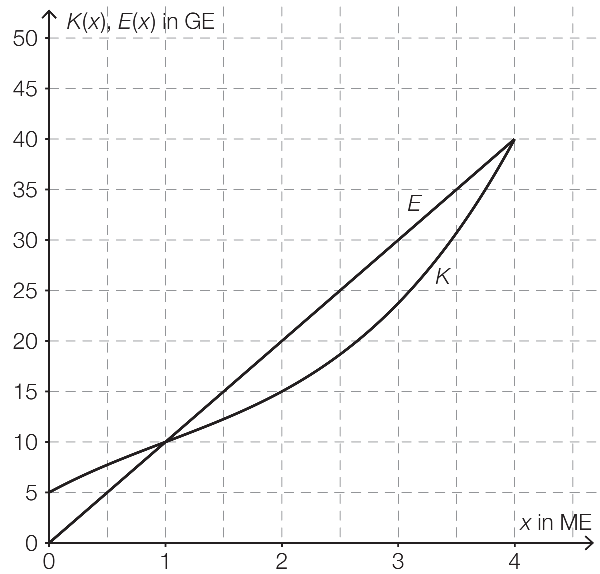
$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,\mathrm{d}x = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$
$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2\,372{,}50 \Rightarrow C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall [0; 4]
1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall [0; 4] als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$