Fußballspielen im Park*

Aufgabennummer: A_250

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

$h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04... \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10... \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89... \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Definitionsbereichs (Die untere Grenze des Definitionsbereichs $x_1 = 0$ muss nicht explizit angegeben sein.)
1 × B: für die richtige Berechnung des höchsten Punktes (beide Koordinaten)
(Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle

c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung