Drehteile

Aufgabennummer: A_086

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern μ = 60 mm (Erwartungswert) und σ = 0,3 mm (Standardabweichung).

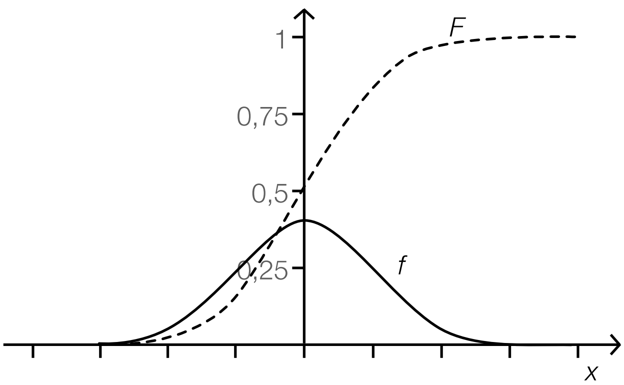
a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt.

b) – Berechnen Sie jenen um den Erwartungswert symmetrisch liegenden Bereich, in dem erwartungsgemäß 90 % aller Durchmesser der Werkstücke liegen.

c) Die gegebene Grafik stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte- und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen dar.

– Vergleichen Sie die beiden Funktionen und erklären Sie ihre Beziehung zueinander.
– Interpretieren Sie beide Graphen hinsichtlich ihrer Extremwerte und Wendepunkte (bezüglich μ und σ) sowie hinsichtlich ihres Verhaltens im Unendlichen.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Wahrscheinlichkeit $P(59{,}5 \leq X \leq 60{,}7)$ wird mittels Technologieeinsatz ermittelt.
(Zufallsvariable X … Durchmesser der Stahlzylinder in mm)

(Alternativ mit Normalverteilungstabelle:
Nach Überführung der gegebenen Verteilung in die standardisierte Normalverteilung wird die Wahrscheinlichkeit $P\left(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{7}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{7}{3}\right)$ ermittelt.)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines zufällig ausgewählten Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt, beträgt etwa 94 %.

b) Ansatz: $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}9$. Die Gleichung $2\Phi(z) - 1 = 0{,}9$ wird nach $\Phi(z)$ aufgelöst. Mittels Technologieeinsatz oder aus der Tabelle erhält man $z = 1{,}64$.
Aus $x = z \cdot \sigma + \mu$ erhält man die gesuchten Grenzen.

(Oder man ermittelt die untere Intervallgrenze 59,51 mm mithilfe von Microsoft Excel:
=NORMINV(5%;60;0,3).)

Das Intervall, innerhalb welchem 90 % der Durchmesser der gefertigten Werkstücke liegen, lautet [59,51 mm; 60,49 mm].

c) Die durchgezogene Kurve zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f (Gauß'sche Glockenkurve) einer Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ.
Die strichlierte Kurve ist die zugehörige Verteilungsfunktion F. F beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist. Das ist gleichzeitig die Fläche unter der Glockenkurve links von x.

Das Maximum der Glockenkurve liegt bei $x = \mu$, dort ist $F(x) = 0{,}5$, da die Glockenkurve symmetrisch zu ihrem Maximum ist.

Die Wendepunkte der Glockenkurve befinden sich bei $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$.

$f(x)$ strebt für $x \rightarrow \pm\,\infty$ gegen 0. Die Gesamtfläche unter der Glockenkurve beträgt 1.
1 ist der Grenzwert der Verteilungsfunktion $F(x)$ für $x \rightarrow \infty$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) leicht	b) 2
c) schwer	c) 3

Thema: Technik

Quellen: —