

Der Bodensee*

Aufgabennummer: A_253

Technologieeinsatz:

möglich

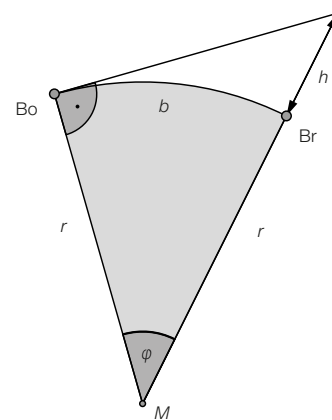
erforderlich

- a) Der Bodensee misst in seiner längsten Ausdehnung von Bregenz (Br) bis Bodman (Bo) 66 Kilometer (km). Aufgrund der Erdkrümmung ist von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman nicht zu sehen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze):

r ... Erdradius (6371 km)

b ... Bogenlänge, entspricht der Entfernung zwischen Bregenz und Bodman

M ... Erdmittelpunkt

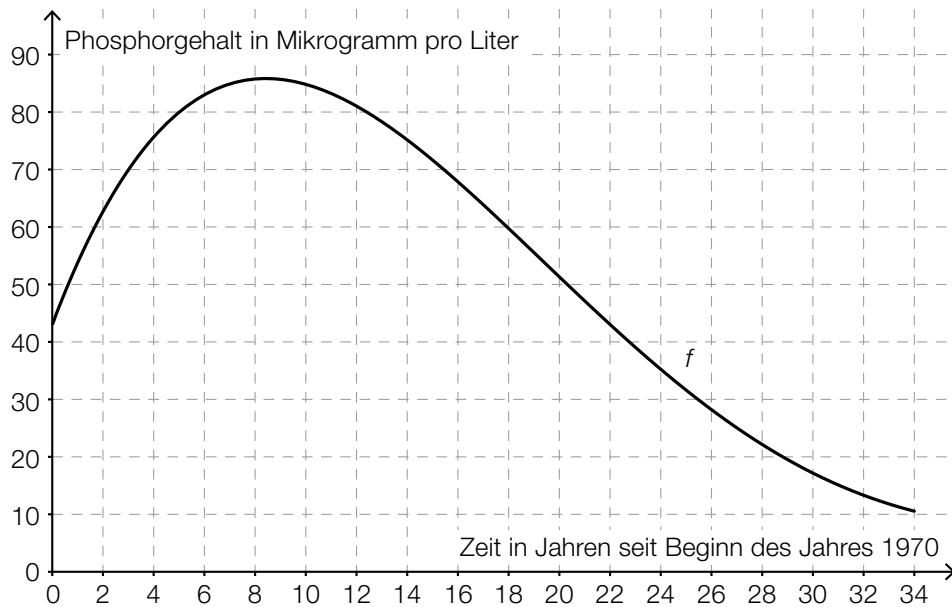


- Berechnen Sie den Winkel φ .

Um bei sehr guten Sichtverhältnissen von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman sehen zu können, muss sich ein Beobachter in Bregenz mindestens auf einer Höhe h über dem Seeniveau befinden (siehe obige nicht maßstabgetreue Skizze).

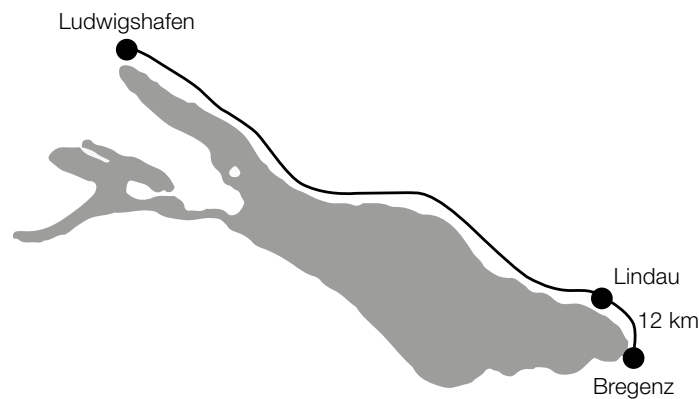
- Berechnen Sie die Höhe h .

b) Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion f beschrieben werden.

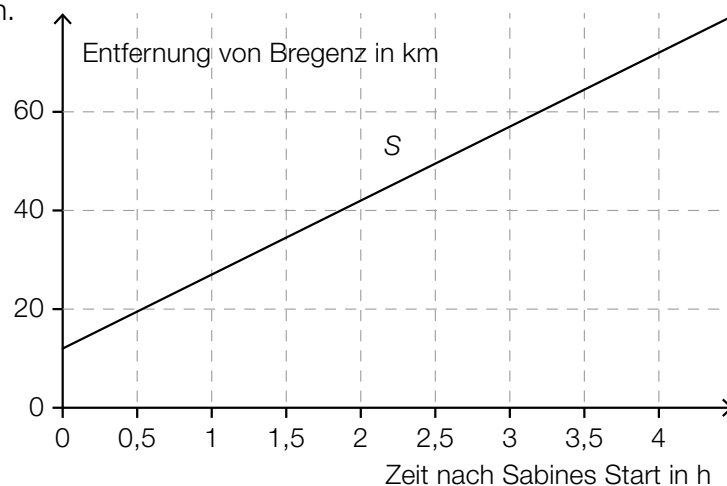


- Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von f die mittlere Änderungsrate des Phosphorgehalts im Zeitintervall $[12; 18]$.
- Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung berechnen kann, wann der Phosphorgehalt am stärksten gesunken ist.

- c) Sabine und Johanna fahren mit ihren Fahrrädern auf einem Radweg in Richtung Ludwigshafen (siehe nachstehende Skizze). Sabine startet im 12 Kilometer von Bregenz entfernten Lindau und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Johanna startet mit einem E-Bike eine Stunde später in Bregenz und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h.



Sabines Entfernung von Bregenz kann näherungsweise durch die lineare Funktion S beschrieben werden.



- Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der linearen Funktion J ein, der Johannas Entfernung von Bregenz darstellt.
- Lesen Sie ab, wie lange Johanna unterwegs ist, bis sie Sabine einholt.

Auch Otto fährt auf diesem Radweg von Bregenz in Richtung Ludwigshafen. Seine Geschwindigkeit kann durch eine Funktion v beschrieben werden.

t ... Zeit in h

$v(t)$... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

- Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit $\int_0^2 v(t) dt$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } b = \pi \cdot r \cdot \frac{\varphi}{180^\circ}$$

$$\varphi = \frac{66 \cdot 180^\circ}{6371 \cdot \pi} = 0,593\dots^\circ \approx 0,59^\circ$$

Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

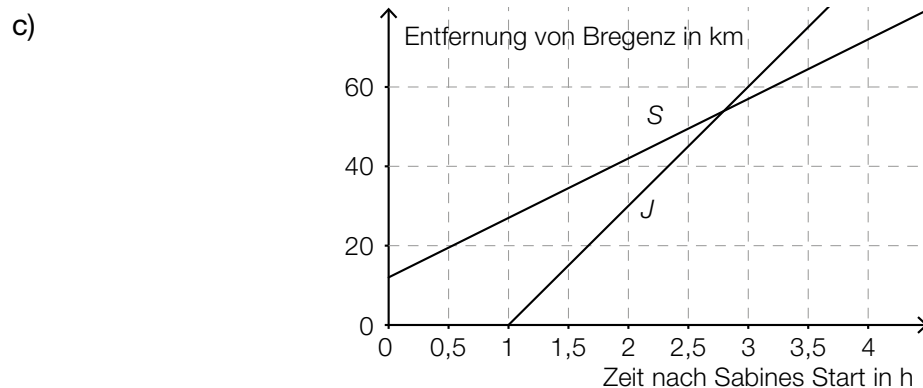
$$\cos(\varphi) = \frac{6371}{6371 + h} \Rightarrow h = \frac{6371}{\cos(\varphi)} - 6371 = 0,3418\dots \approx 0,342$$

Die Höhe, auf der sich ein Beobachter befinden müsste, beträgt rund 342 Meter.

$$\text{b) } \frac{60 - 81}{18 - 12} = -3,5$$

Die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall beträgt rund $-3,5 \mu\text{g}$ pro Liter pro Jahr.
Toleranzintervall: $[-4; -3,3]$

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion f im dargestellten Intervall. In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.



Johanna ist 1,8 h unterwegs, bis sie Sabine einholt.

Toleranzintervall: $[1,6; 2,1]$

Es wird die Länge desjenigen Weges (Entfernung von Bregenz) in Kilometern berechnet, den Otto in den ersten 2 Stunden zurückgelegt hat.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels φ
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h
- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate im Toleranzbereich $[-4; -3,3]$
1 × C: für die richtige Dokumentation in Worten (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)
- c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen
1 × C1: für das richtige Ablesen der Fahrdauer im Toleranzbereich $[1,6; 2,1]$
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit